

EL BASILISCO

Revista de materialismo filosófico

Nº 61 (2025), páginas 84-97

Rodrigue Juan Andre Seels Márquez

Universidad Nacional Autónoma de México

Filosofía de la Teoría de categorías

Resumen:

Ofrecemos aquí un análisis gnoseológico y ontológico de la ciencia matemática denominada «Teoría de categorías», tomando como sistema de coordenadas al Materialismo filosófico. Comenzamos planteando algunas cuestiones que suscita esta ciencia y después argumentamos la necesidad de enfocarnos, en primer lugar, en la de la verdad científica. Luego, tras exponer las cuatro alternativas gnoseológicas según las cuales cabe enfrentarse a esta cuestión (a saber: adecuacionismo, teoreticismo, descripcionismo y circularismo), ejemplificamos minuciosamente las primeras tres: como adecuacionismo, proponemos al Estructuralismo realista *ante rem* de Stewart Shapiro; como teoreticismo, al Estructuralismo metodológico *como si* de Elaine Landry; y, finalmente, como descripcionismo, a las posiciones que reducen a esta ciencia a sus «aplicaciones». Tras esto, definimos nuestra posición en cuanto negación de las demás alternativas y exponemos la doctrina del Materialismo formalista, haciendo especial énfasis en la dialéctica entre las definiciones y los ejemplos de la Teoría de categorías. Por último, enfrentamos nuestro circularismo contra la filosofía de Jean Pierre Marquis, la cual diagnosticamos, en su parte gnoseológica, como un circularismo indeterminado, carente de fundamento.

Palabras clave: teoría de categorías, filosofía, ontología, gnoseología, teoría del cierre categorial, materialismo filosófico.

Abstract:

We offer here a gnoseological and ontological analysis of the mathematical science known as «Category theory», taking Philosophical materialism as our coordinate system. We begin by raising some philosophical questions about this science and then we argue the need to focus, first, on the question of scientific truth. Then, after presenting the four gnoseological alternatives according to which this question can be addressed (namely: adequationism, theoreticism, descriptionism, and circularism), we carefully exemplify the first three: as adequationism, we propose Stewart Shapiro's *ante rem* realist structuralism; as theoreticism, Elaine Landry's *as if* methodological structuralism; and, finally, as descriptionism, we propose the positions that reduce this science to its «applications». Following this, we define our position as a denial of the other alternatives and expound the doctrine of Formalist Materialism, placing special emphasis on the dialectic between the definitions and examples of Category theory. Finally, we confront our circularism with the philosophy of Jean Pierre Marquis, which we diagnose, in its epistemological aspect, as an indeterminate circularism lacking foundation.

Keywords: category theory, philosophy, ontology, gnoseology, philosophical materialism, sciences as categorical closures.

EL BASILISCO

Fundador

Gustavo Bueno

Director

Gustavo Bueno Sánchez

Secretaría de Redacción

Sharon Calderón-Gordo (Fundación Gustavo Bueno)

Consejo de Redacción

Jesús G. Maestro (Universidad de Vigo)

José Arturo Herrera Melo (Universidad Veracruzana, México)

Íñigo Ongay de Felipe (Universidad de Deusto)

Patricio Peñalver (Universidad de Murcia)

Elena Ronzón (Universidad de Oviedo)

Pedro Santana (Universidad de La Rioja)



Todos los artículos publicados en esta revista han sido informados anónimamente por pares de evaluadores externos a la Fundación Gustavo Bueno.

EL BASILISCO se publica con periodicidad semestral. Véanse las normas para los autores en: <http://www.fgbueno.es/edi/basnor.htm>

<http://www.fgbueno.es/bas>
basilisco@fgbueno.es

ISSN 0210-0088 (vegetal) - ISSN 2531-2944 (digital)
Depósito Legal: O-343-78



© Fundación Gustavo Bueno * Plaza Gustavo Bueno * 33005 Oviedo (España)



Filosofía de la Teoría de categorías

Rodrigue Juan Andre Seels Márquez

Universidad Nacional Autónoma de México

Introducción

El título de este artículo podría hacer pensar a algún lector que el tema de éste es la idea de categoría tal y como ha sido tratada en los diversos sistemas filosóficos de nuestra tradición (Aristóteles, Domingo de Soto, Kant o el propio Materialismo filosófico, por ejemplo). No obstante, si bien esta idea no es ajena al asunto que nos ocupa, nuestro punto de partida es la —al menos pretendida— disciplina matemática roturada desde hace más de 40 años como «Teoría de categorías» y desarrollada y expuesta en libros, conferencias, congresos, artículos, &c. Una disciplina que, al menos en apariencia, tiene sus propios términos (categorías, conos límite, flechas...), operaciones (funtores, transformaciones naturales...), relaciones (adjunciones...) e incluso teoremas (e.g., el Teorema del funtor adjunto). Pero esta teoría, ¿es una disciplina científica, o no es más que un lenguaje, tal y como defiende, por ejemplo, Elaine Landry? ¿Cuál es el estatuto ontológico de los objetos de ésta? ¿Es que, tal y como se suele decir, nos pone delante de las «estructuras formales» de las Matemáticas? ¿Estamos, como antaño se llegó a pensar de la Lógica formal, ante, en palabras de Jean Pierre Marquis, «la arquitectura de las Matemáticas», o más bien, como creyeron en un principio Mac Lane y Eilenberg, sus fundadores, su contenido se agota en un solo artículo? A nuestro modo de ver, todas estas cuestiones (y muchas más) no son preguntas propiamente Matemáticas, sino más bien filosóficas, y esto principalmente porque están

formuladas por medio de ideas (como verdad, forma, estructura, &c.) que desbordan los recintos científicos o técnicos. Además, estas ideas no son unívocas, por lo que no hay una única forma de responder a estas cuestiones, pero, en la medida en que entre los distintos significados de una idea existen nexos dialécticos, las respuestas que se puedan dar no son independientes unas de otras, sino que toman su pleno sentido en cuanto negación de las demás.

Ahora bien, hay filosofías de la Teoría de categorías que se conforman como una «secreción espontánea» de los propios matemáticos que cultivan esta disciplina. Por ejemplo, es muy común escuchar a un matemático decir, tras quedar absorto por el Lema de Yoneda, que «deberíamos enfrentarnos a la realidad siguiendo la filosofía de este lema, tratando de conocer a los objetos no en sí mismos, cuanto en su relación con los demás». A este tipo de filosofías las llamamos filosofías «genitivas». Pero el sentido en el que interpretamos el título de este artículo no es este, sino uno que toma al genitivo, no como subjetivo, sino como objetivo, dando lugar así a las filosofías «centradas» (en este caso, en torno a la Teoría de categorías), las cuales reflexionan filosóficamente sobre esta disciplina, pero no espontáneamente, sino desde un cierto «distanciamiento», según unas ideas más o menos sistematizadas. Y si bien hay muchas cuestiones que suscita esta teoría (como aquella, planteada por William Lawvere, de la «unidad e identidad de los opuestos»), nos parece que, antes de abordarlas, es imprescindible

partir de la cuestión central de la verdad de la Teoría de categorías, la cual está totalmente implicada con la del estatuto ontológico de sus objetos y, en la línea de la tradición escolástica, con la cuestión de *distinctio et unitate scientiarum*. En efecto: ¿cómo decir algo acerca de las contradicciones entre la Teoría de conjuntos y la Teoría de categorías sin antes tener un criterio de unidad y distinción? O, por poner otro ejemplo, ¿es que podemos hablar de si la Teoría de categorías «unifica» a las Matemáticas, sin antes dar cuenta de cómo es que esta teoría se constituye? Por nuestra parte, lo consideramos inviable. Es así que nos interesan aquellas filosofías «centradas» en lo que tengan que decir respecto a la verdad científica de la Teoría de categorías. Y, en la medida que, como ya dijimos, las ideas no son unívocas y sus múltiples sentidos tienen nexos dialécticos, se hace preciso tomar partido por una filosofía y definirse en función de la negación de las demás. Así, no partimos aquí de un conjunto cero de premisas, sino desde el sistema de coordenadas del Materialismo filosófico. Que esta elección se justifique mostrando la potencia del sistema en el propio desarrollo dialéctico de este escrito.

1. El criterio de clasificación

La distinción entre materia y forma, aplicada al análisis de las ciencias múltiples históricamente dadas, en lo que refiere a sus verdades científicas, aparece constantemente a lo largo de la tradición filosófica. Así Aristóteles, quien veía en el silogismo la forma que «conduce» la verdad de los axiomas (la materia) a las conclusiones, o la doctrina kantiana que distingue la materia del conocimiento, de las formas a priori de la sensibilidad (intuiciones del espacio y tiempo) y del entendimiento (las categorías). En la filosofía de las Matemáticas, tenemos, por ejemplo, al formalismo de Hilbert, el cual, tras la revolución de las geometrías no euclidianas, trató como equivalentes a los axiomas y postulados, lo cual llevó al esquema «hilemórfico» hacia los componentes formales, posicionándose así en una concepción de las ciencias como sistemas hipotético-deductivos. Pero también tenemos ejemplos más recientes: Steward Shapiro define a los sistemas matemáticos como colecciones de objetos entre los cuales median ciertas relaciones, a las estructuras como las formas puras de estos sistemas (formas que solo consideran a las relaciones, abstrayendo a los objetos) y, como argumentaremos, a la verdad matemática en función de cierta correspondencia entre el lenguaje matemático (la materia) y estas estructuras. En la filosofía de la Teoría de categorías, Jean Pierre Marquis, siguiendo una tradición neokantiana, define a los «morfismos canónicos» como formas *a priori*, a las cuales se habría llegado desde una materia matemática tras un proceso histórico de abstracción. A nuestro modo de ver, esta distinción, tal y como es utilizada en este contexto, brota, en principio, de la comparación de unas

ciencias con otras, en la medida en que, por una parte, cada una se nos presenta como distinta a las demás (con una materia específica), pero, por otra, algo habrán de tener en común, al menos analógicamente, en virtud de lo cual puedan ser llamadas ciencias: la forma. Y esto sin perjuicio de que haya quienes ven a las Matemáticas o a la Lógica formal como «ciencias formales», distintas de las «ciencias naturales», o quienes defienden que la forma de una ciencia son sus Matemáticas o su Lógica formal. De cualquier modo, la Teoría del cierre categorial (la doctrina gnoseológica del Materialismo filosófico) erige a estas coordenadas (forma, materia, verdad) como constitutivas de la *escala gnoseológica*, una escala que, por lo tanto, se diferenciará de los análisis epistemológicos (propios de la teoría del conocimiento), los cuales se basan en la distinción entre sujeto y objeto.

Ahora bien, como ya sugerimos, no hay una única manera de interpretar la distinción y su relación con la verdad, por lo que se hace preciso presentar una tipología gnoseológica y dialéctica, un sistema polémico de alternativas que agrupe en familias gnoseológicas enfrentadas a las distintas teorías de la ciencia, y esto sin perjuicio de que dos teorías pertenecientes a una misma familia puedan mantener relaciones de oposición en base a otros criterios. En cualquier caso, tenemos cuatro tipos de teorías posibles, que corresponden a las cuatro alternativas de conexión entre forma y materia; a saber: (1) La alternativa del *adecuacionismo*, en donde la verdad brota de la adecuación entre una materia y una forma, entendidas, en principio, como distintas, pero yuxtapuestas. Es el caso, como veremos, del autodenominado «Estructuralismo realista *ante rem*» de Steward Shapiro. (2) La alternativa del *teoreticismo*, en donde la verdad brota de la forma, independientemente de la materia, en virtud de lo cual ésta queda enteramente subordinada a aquella. Pondremos como ejemplo al autodenominado «Estructuralismo metodológico *como si*» de Elaine Landry, el cual precisamente se define en función de su negación del estructuralismo de Steward Shapiro. (3) La alternativa del *descripcionismo*, en donde la verdad brota de la materia independientemente de la forma. En el contexto de la Teoría de categorías, podríamos interpretar como descripcionistas a aquellas posiciones que interpreten la verdad de esta teoría como sus «aplicaciones», entendidas éstas como un «descenso» a la materia. (4) La alternativa del *circularismo*, que niega propiamente la disociación de materia y forma. Pero ¿qué significa esto? Por lo pronto, significa negar, no la pertinencia de las ideas de materia y forma en la cuestión que nos ocupa, sino el *esquema metamérico* que suponen el resto de las alternativas, el cual toma a la materia, a la forma, o a ambas como «totalidades» independientes, *hipostasiadas*; una negación dada en función de un *esquema diamérico* que conceptualiza a la forma como el nexo entre materialidades distintas. Si bien esta es la familia a la que pertenece la propia Teoría del cierre categorial, reconocemos que también encontramos aquí a otras teorías distintas, como la filosofía de la Teoría de categorías de Jean Pierre Marquis, por lo que será necesario aplicar un criterio que distinga a nuestra teoría de las demás teorías circularistas. Por lo demás,

estamos ante una situación genuinamente dialéctica: reconocemos que el *factum* de la multiplicidad de ciencias lleva a una distinción metamérica entre una materia y una forma, pero la Teoría del cierre categorial rectifica la distinción en función de la negación de las alternativas que utilizan este esquema. Dicho de otro modo: el circularismo necesita, para definirse, de las otras alternativas, aunque sea para negarlas. De este modo, no entendemos este sistema de alternativas como una clasificación neutra, la cual cabría hacer sin primero haber elegido una alternativa, sino que este sistema está ya construido desde la perspectiva de la alternativa por la que se va a tomar partido en función de su negación de las demás. Supuestas estas advertencias, ofrecemos una representación «algebraica» del sistema de alternativas, en donde utilizamos los valores 1 y 0 para indicar «el peso» que cada familia le da a la materia y a la forma en función de la verdad científica:

	Materia	Forma
(1) Adecuacionismo	1	1
(2) Teoreticismo	0	1
(3) Descripcionismo	1	0
(4) Circularismo	0	0

Por otra parte, nuestra *gnoseología general* (orientada a la determinación de una idea general de ciencia) no se encuentra «por encima» de sus especificaciones (las *gnoseologías especiales*, tales como la gnoseología de la Mecánica clásica, de la Aritmética o de la Teoría de categorías). Y si bien esto podría hacer pensar a algún lector que nos encontramos así en una perspectiva nominalista, este no es el caso en la medida en que el formato Lógico material de partida no es el de un género porfiriano (en donde la variación del género se lleva a cabo unívocamente y según diferencias extrínsecas), sino el de un *género combinatorio*, en los cuales la variación (inmediata) del género se concibe como un sistema de «factores» susceptibles de ser combinados de distintos modos, lo cual está ligado a que es por medio del recorrido diamérico de estas combinaciones por el que se define el género. Este es el caso, por ejemplo, del género palanca (cuyos factores son [A, R, P]), el cual se divide inmediatamente en sus especies, cada una de las cuales corresponde a una combinación distinta de los factores ((P, R, A), (R, P, A) y (P, A, R)). Así, nuestra idea general de ciencia va referida a un género variacional que se modula en sus diversas especificaciones, en donde, como veremos, tomamos como factores, por ejemplo, a términos, relaciones, operaciones, objetos, fenómenos, &c., en la medida, sobre todo, en que estén encaminados a la constitución de verdades científicas. De este modo, cada gnoseología especial no es una mera reiteración de una idea de verdad científica ya plenamente configurada, sino que es un desarrollo de la idea misma. Desde este punto de vista, este artículo se encuentra en el terreno propio de la gnoseología especial, pero en la dialéctica ya señalada con la gnoseología general. En definitiva,

la gnoseología de la Teoría de categorías nos llevará a discusiones gnoseológicas propias e irreducibles a las de otras gnoseologías especiales.

Pasemos ahora a ejemplificar, en el contexto de la filosofía de la Teoría de categorías, a las familias (1), (2) y (3). Tras cada ejemplo, haremos una breve crítica que adelantará nuestra posición general, la cual tomará su pleno sentido en cuanto que negación de todas las demás alternativas.

2. Las familias gnoseológicas

(1) El adecuacionismo

Como dijimos, esta alternativa entiende a la verdad científica como una adecuación entre una materia y una forma que previamente han sido disociadas en el análisis de una ciencia. No deja de tener interés que esta alternativa puede corresponderse con la metáfora que entiende a una ciencia como una pintura de una realidad que está fuera del marco y al científico como el artífice de aquella. Así Peter T. Johnstone, que, en su libro *Sketches of an elephant* [7], nos dice, haciendo uso de un famoso cuento indio, que la Teoría de topos (una «subdisciplina» de la Teoría de categorías) es como el dibujo de un elefante, donde las diferentes «conceptualizaciones» de un topos (por ejemplo, como una categoría de gavillas sobre un sitio) corresponden a diferentes partes del animal, mientras que el propio concepto de topos es el elefante que les da unidad. Sin duda, la metáfora no es gratuita, pero, por sí sola, es confusa, entre otras cosas porque mientras el concepto de topos se nos aparece en su totalidad en cada «conceptualización», el elefante no en cada una de sus partes. De cualquier modo, la definición de adecuacionismo es abstracta por la indeterminación de los términos «materia», «forma» y «adecuación», los cuales designan cosas distintas según el sistema de referencia. Luego, es necesario dar ejemplos, y aquí daremos uno: el Estructuralismo realista *ante rem* de Steward Shapiro.

Puede parecer extraña la decisión de tomar como ejemplo al estructuralismo de Shapiro, en la medida en que él propiamente no desarrolló su filosofía de las Matemáticas tomando en cuenta directamente a la Teoría de categorías y sus menciones a ésta son más bien tangenciales. Sin embargo, la principal razón de esto es que varios artículos sobre el tema que nos ocupa están escritos desde perspectivas estructuralistas, y las referencias a su doctrina son constantes. De hecho, como ya mencionamos, nuestro ejemplo de teoreticismo (el Estructuralismo metodológico *como si* de Elaine Landry) está construido explícitamente contra esta posición. Por lo demás, tomaremos como referencia a su libro *Philosophy of mathematics: Structure and ontology* (15),

sin que ello quiera decir que pretendamos hacer aquí una crítica a todas las tesis contenidas en éste.

Para Shapiro, un sistema es una colección de objetos que mantienen relaciones entre sí, mientras que una estructura es la forma de un sistema, la cual consta solo de las relaciones que mantienen los objetos, con abstracción de éstos. Así, una cosa son los sistemas de números naturales (como el sistema de John von Neumann, en donde $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, o el sistema de Ernst Zermelo, en donde $2 = \{\{\emptyset\}\}$), y otra es su estructura, que consta sólo de las relaciones entre números, como, por ejemplo, las relaciones de orden. Nos parece que, en la Teoría de categorías, un ejemplo de estructura sería la definición de producto fibrado, mientras que un sistema con esta estructura sería, por ejemplo, una preimagen del Álgebra lineal. De cualquier modo, en una estructura, las relaciones las soportan no unos objetos «concretos», sino unos «lugares», los cuales se definen justamente en función de las relaciones. Ahora bien, Shapiro, frente a los denominados «estructuralismos eliminativos» (como el de Geoffrey Hellman), sostiene que una estructura existe independientemente de cualquier sistema de objetos que pueda ejemplificarla, pues, en principio, si no aceptáramos esto, correríamos el riesgo de poder construir, en el lenguaje matemático, oraciones que, por la falta de sistemas estructurales, fueran ciertas «por vacuidad». Shapiro da el siguiente ejemplo hipotético: si sólo existiesen una cantidad finita de objetos en el universo, entonces, como no podría haber sistemas de números naturales, cualquier oración del lenguaje de la aritmética, como $2 + 2 = 5$, sería verdadera, pues no se podrían dar contraejemplos. Pero ¿en qué medida cabe hablar de $2 + 2 = 5$ como una «oración de la Aritmética» en un hipotético universo en donde no existen sistemas de números naturales? ¿Podría haber un «lenguaje aritmético» al margen de los sistemas estructurales propios de esta disciplina? En cualquier caso, Shapiro defiende así que las estructuras deben funcionar como un «trasfondo ontológico» de las Matemáticas, independiente de los sistemas y el lenguaje, y, de hecho, es por esta razón por la que denomina a su doctrina «Estructuralismo realista ante rem».

Todo esto lo lleva a la necesidad de formular su Teoría de estructuras, la cual pretende ser algo así como una «representación», tanto de este supuesto «trasfondo ontológico» de las Matemáticas, como de la manera en la que los matemáticos «conocen» a las estructuras. Esta teoría, si bien no puede ser Teoría de conjuntos (pues esta disciplina opera con unas estructuras particulares), está conformada por una lógica de segundo orden y una serie de axiomas prácticamente hechos a modo y semejanza de los de ésta (por ejemplo, uno de los axiomas es: «Infinitud: hay al menos una estructura que tiene un número infinito de lugares»). Particularmente importante para la cuestión del «conocimiento» de las estructuras

es el axioma de «coherencia», el cual establece que «si una fórmula ϕ es coherente en un lenguaje de segundo orden, entonces existe una estructura que la satisface».

Pero ¿qué significa que una fórmula ϕ sea coherente? Shapiro admite que la respuesta no es sencilla. Primero tantea la posibilidad de definir «coherencia» por medio de «consistencia» (esto es, que la fórmula no lleve a contradicción), pero termina rechazando esta opción principalmente porque el lenguaje de segundo orden implica que la «consistencia» no asegura la existencia de la estructura; luego, considera definirla por medio de la «satisfacibilidad» de la Teoría de conjuntos (en este caso, la «coherencia» significaría que existe un modelo), pero también rechaza esta opción, sobre todo por su dependencia a esta teoría; así, finalmente, declara a la «coherencia» un término intuitivo, una noción primitiva, no reducida a algo formal (Shapiro, 1997, pág. 135). Esto engrana con otra tesis suya de que hay tres «técnicas epistémicas» por las cuales los matemáticos «conocen» estructuras: por medio de reconocimiento de patrones finitos, por la extensión de estos patrones finitos y, finalmente, por definición implícita, en donde la estructura queda definida por combinaciones de signos de unos axiomas expuestos en el «lenguaje de las Matemáticas». Dejamos aquí de lado esta clasificación y las dos primeras «técnicas», pues es respecto a la «definición implícita» por lo que la definición «intuitiva» de «coherencia» toma más importancia. Para Shapiro, una «definición implícita» es «exitosa» si define al menos una estructura (lo cual, según el axioma de su Teoría de estructuras, está implicado por la «coherencia») y si es «categórica» (esto es, define a lo más una estructura). Al margen del problema de la «categoricidad», ¿cómo sabemos que una definición implícita es coherente si es que esta «noción» es meramente intuitiva? Es aquí en donde el Estructuralismo realista *ante rem* se torna más oscuro y confuso, pues la respuesta es que la coherencia está fundada simplemente en el uso «correcto» de un lenguaje matemático. Traducimos: al menos en el campo de las Matemáticas puras, «aprehender» una estructura y entender el lenguaje de su teoría son equivalentes. Para entender una estructura y tener la habilidad de referirse a sus lugares no hay más que usar el lenguaje correctamente (Shapiro, 1997, pág. 137). ¿Y qué es usar el lenguaje «correctamente»? Shapiro admite que no cuenta con un criterio universal, y que, más bien, cada disciplina matemática tiene sus propios criterios, motivados por sus propios problemas y metas. Pero ¿cómo es posible que, por una parte, se postule la existencia independiente y objetiva de las estructuras (la forma), pero, por otra, se reconozca que estas estructuras se delimitan por medio de un lenguaje (la materia) según unos criterios meramente pragmáticos? Para más inri, la verdad matemática está, en esta doctrina, subordinada a la coherencia y categoricidad de los axiomas, de tal manera que, si definen a una única estructura, entonces

son verdaderos, junto con todas las otras proposiciones que se puedan obtener por medio de deducciones a partir de éstos.

A nuestro modo de ver, el *proton pseudos* del Estructuralismo realista *ante rem* es su separación de la materia (el lenguaje) y la forma (las estructuras) en el análisis de las Matemáticas, una separación que después se busca rectificar postulando que el uso «correcto» del lenguaje lleva al «conocimiento» de las estructuras, sin explicar cómo es que éstas, a pesar de estar delimitadas por aquel, son objetivas, y sus axiomas, junto con las proposiciones derivadas, verdaderos. Por esta razón, desde la Teoría del cierre categorial rechazamos esta alternativa.

Ahora bien, reconocemos un fulcro de verdad en la distinción entre estructuras y sistemas estructurados en la medida en que recoge situaciones objetivas, tal como la del producto fibrado. Sin embargo, más adelante ofreceremos otro criterio de distinción, pues el utilizado por Shapiro es metafísico, sobre todo porque supone definir a las estructuras como formas puras, lo cual es inadmisibles desde una posición materialista.

(2) El teoreticismo

En esta familia gnoseológica, la verdad brota de la forma, de tal modo que la materia queda totalmente subordinada a ésta. Como en la definición de adecuacionismo, esta definición es insuficiente por indeterminada, así que se hace preciso dar ejemplos. Aquí recurrimos al autodenominado «Estructuralismo metodológico *como si*» de Elaine Landry.

Si bien Landry ha escrito múltiples artículos sobre filosofía de la Teoría de categorías, nos centraremos aquí en uno titulado *Mathematics: Method Without Metaphysics* [10], en el cual presenta por primera vez su Estructuralismo metodológico *como si*. Landry explícitamente erige su teoría contra los estructuralismos de Hellman, Shapiro, Resnik, &c. Su propuesta, basada en una reinterpretación de la filosofía de las Matemáticas de Platón, es que estas teorías han confundido el método de la filosofía, que logra «asentar» unos primeros principios, con el método de las Matemáticas, según el cual los matemáticos actúan «como si» partieran de unos primeros principios, sin que, en realidad, sea el caso. No nos interesa aquí analizar su reinterpretación de Platón, sino criticar su propuesta sobre el método de las Matemáticas, sobre todo en lo que refiere a la verdad científica. Por otra parte, expondremos su posición en función de su confrontación con el Estructuralismo realista *ante rem* de Shapiro.

Para Landry, la Teoría de estructuras de Shapiro está motivada simplemente porque él considera que las Matemáticas sólo pueden ser objetivas si se «asientan» sobre un «trasfondo ontológico», pero esto, a juicio de ella —y en esto le damos la razón, según

lo dicho en el anterior apartado—, solo le ha llevado a postulados metafísicos. Así, en un intento de frenar semejante metafísica, Landry propone que, en realidad, lo importante para los matemáticos es la solución de «problemas», en función de los cuales se formulan unos axiomas que, por medio de las combinaciones de los signos tipográficos involucrados, definen, al menos, una estructura (siguiendo con ello la tradición de Hilbert). Lo fundamental es que los matemáticos toman estos axiomas *como si* fuesen verdaderos (y su estructura correspondiente *como si* existiera) sólo para resolver el problema en cuestión, sin que ello quiera decir que, en realidad, esto es así. Es por esta razón por la que Landry llama a su filosofía Estructuralismo metodológico *como si*. Por otra parte, los objetos matemáticos se definen en los axiomas por las estructuras de las que forman parte, por lo que hay tantos «tipos» de objetos cuantas disciplinas Matemáticas (grupos, espacios topológicos, categorías, &c.). Sin embargo, la Teoría de categorías no es sólo una disciplina más entre otras, sino que también tiene una función meta-matemática, la cual consiste en ser una teoría —un «marco lingüístico», en palabras de Landry— de las propias estructuras matemáticas, tal y como correspondía a la Teoría de estructuras de Shapiro. Y esto principalmente porque 1) no tiene axiomas que afirmen la existencia de objetos, a diferencia de la teoría de conjuntos («existe el conjunto vacío», por ejemplo); 2) los objetos y flechas son indeterminados, por lo que no «reducen» a los objetos matemáticos a, por ejemplo, conjuntos; y 3) captura, en términos de funtores, equivalencia de categorías, isomorfismos, &c., la «estructura común» de varios tipos de sistemas estructurados. Más adelante, al presentar nuestra posición, haremos un comentario sobre esto. De cualquier modo, Landry nos dice que este papel meta-matemático de la Teoría de categorías no implica que las categorías existen en un «más allá», sino que, como ocurre con las demás disciplinas, los matemáticos suponen a los axiomas de la Teoría de categorías como verdaderos (y, por lo tanto, a las categorías como existentes) sólo para resolver un problema, que, en este caso, es el de la clasificación de las estructuras matemáticas. Sin embargo, la situación aquí es ligeramente distinta, pues, al parecer, al estar en un plano meta-matemático, estos axiomas se suponen, más que verdaderos, consistentes, de tal modo que, a su vez, esto podría implicar, para algunos matemáticos, el problema de su consistencia, el cual, para Landry, se soluciona con una prueba de consistencia relativa que pruebe que estos axiomas son satisficibles. Todo esto sin necesidad de que haya unas estructuras que sirvan como «trasfondo ontológico», pues la prueba de consistencia relativa sólo exigiría suponer la consistencia de otra teoría en función del problema de la consistencia de los axiomas de la Teoría de categorías. Se podría pensar que estamos así ante un *regressus ad infinitum*, pero, al menos para Landry, esto no es necesario, pues, sin perjuicio de

que se puede plantear el problema de la consistencia de una teoría, lo fundamental no es esto, cuanto la capacidad de las teorías para resolver problemas.

Desde nuestro punto de vista, Landry acierta al intentar «frenar» la metafísica adecuacionista de Shapiro, lo cual hace negando la hipóstasis de las estructuras en la que incurre el Estructuralismo realista *ante rem*. Sin embargo, al no poder apelar a la verdad como adecuación, solo ve como única alternativa posible defender que las verdades matemáticas —ya sea la verdad de los axiomas o su consistencia— son algo meramente postulado por los matemáticos en función de problemas (sin perjuicio de que, en el contexto meta-matemático, se pueda problematizar la propia consistencia de los axiomas utilizados, un problema cuya solución requeriría suponer la consistencia de otra teoría). Los axiomas serían así una forma carente de contenido real, de materia. Pero si la verdad (o consistencia) de los axiomas es un mero postulado «provisional», ¿cómo cabría explicar la objetividad de las Matemáticas? A nuestro modo de ver, el Estructuralismo metodológico *como si* no tiene una respuesta a esto. Landry, al rechazar la hipóstasis de Shapiro, ha sacrificado poder dar una explicación de la objetividad de las Matemáticas, o, dicho de otro modo: le ha quitado a las verdades matemáticas cualquier contenido material. Es precisamente por esta razón por la que vemos a esta filosofía como un caso de teoreticismo. No es casualidad que, en una conferencia suya titulada *If category theory were a foundation* [11] concluye que, dadas las condiciones *sui generis* de estas «verdades», propiamente no podríamos decir que las Matemáticas son una ciencia.

No obstante, le reconocemos un fulcro de verdad a Landry cuando reivindica la importancia que los problemas tienen en la configuración de los axiomas que se toman como punto de partida para su resolución. Desde la Teoría del cierre categorial, no defendemos que la verdad reside en los axiomas, pero sí reconocemos que éstos están dados en función de las conclusiones a las que se pretende llegar, efectuando así un movimiento *circular*.

(3) El descriptivismo

Esta familia de teorías se caracteriza por colocar a la verdad científica en la materia, lo cual supone una subordinación de la forma a ésta. Como en los demás casos, hay que recurrir a ejemplos, y si bien no hemos logrado dar con una filosofía más o menos sistemática que mantenga esta posición respecto a la Teoría de categorías, consideramos que la podemos encontrar implícitamente en algunos matemáticos, por no decir muchos.

Más en concreto, nos referimos a aquellas posiciones que reducen la verdad de la Teoría de categorías a sus «aplicaciones», interpretadas éstas como un «descenso» a la materia. Así, por ejemplo, el topólogo algebraico que

ve en la Teoría de categorías una mera «herramienta», útil para, pongamos por caso, asignar «formalmente» un grupo a un espacio topológico. También cabría interpretar en este contexto a aquellos matemáticos que ven en esta teoría, más allá de sus aplicaciones, pura *abstract non-sense*.

En todo caso, el fulcro de verdad que le reconocemos a esta posición es que la Teoría de categorías no puede, en una suerte de autismo, desentenderse del resto de las Matemáticas.

(4) El circularismo

El circularismo se define por la negación de la hipóstasis en la que incurren las demás familias gnoseológicas, y esto en función de un esquema diamérico, según el cual la forma son los nexos entre las distintas materialidades. Ahora bien, como ya mencionamos, no cabe identificar a la familia del circularismo con la Teoría del cierre categorial, por lo que es necesario ofrecer un criterio de distinción que nos permita confrontar nuestra teoría con el resto de gnoseologías circularistas. Como veremos, el núcleo del circularismo de la Teoría del cierre categorial —el circularismo materialista— es la doctrina de los *contextos determinantes*, en función de la cual, por lo tanto, diferenciamos nuestra teoría del resto de circularismos. De este modo, distinguiremos entre *circularismos determinados* (por la doctrina de los contextos determinantes) y *circularismos indeterminados*. Este criterio evidentemente no procura ser neutro, sino que lo formulamos desde la propia Teoría del cierre categorial y con pretensiones críticas, hasta tal punto que veremos a los circularismos indeterminados como circularismos carentes de fundamento. Por lo demás, en la medida en que nuestro criterio apela al núcleo de nuestra teoría, antes de exponer y criticar la filosofía de la Teoría de categorías de Jean Pierre Marquis presentaremos nuestra posición.

(a) El circularismo determinado de la Teoría del cierre categorial

Como aquí pretendemos desarrollar la Teoría del cierre categorial según el análisis de la Teoría de categorías, necesitamos primero exponer las «líneas maestras» de la filosofía de las Matemáticas y de la Lógica formal del Materialismo filosófico: el Materialismo formalista, el cual, por otra parte, supone la propia Teoría del cierre categorial y la Ontología del sistema. Nuestros textos principales de referencia son *Teoría del cierre categorial* [1], *Ensayos materialistas* [4] y los artículos *Operaciones autoformantes y heteroformantes. Ensayo de un criterio de demarcación gnoseológica entre la Lógica formal y la Matemática I y II* [2] y [3].

El Materialismo formalista, frente a las hipóstasis en las que incurren las filosofías que sitúan a los «objetos» matemáticos o lógico formales «más allá» del pizarrón

(e.g., Frege, Brouwer, Marquis...), defiende que las Matemáticas y la Lógica formal² son indisociables de las «manchas de tinta», de los grafos inscritos sobre un soporte material, los cuales son construidos por los hombres, en su calidad de sujetos operatorios. Sin embargo, esto no quiere decir, tal y como pretendió el formalismo de Hilbert, que estos grafos estén vacíos de significado —una diferencia con consecuencias ontológicas importantes, como veremos—, sino todo lo contrario: estos grafos son signos, significantes. Pero desde una perspectiva materialista es obligado referir, en la estructura de las relaciones entre un significante y su significado, a los procesos causales, en cuanto que tratar a los componentes semánticos de los signos al margen de los componentes pragmáticos es puro mentalismo. Así, por lo pronto, el significado de unos grafos se produce en el propio *ejercicio operatorio* de los sujetos gnoseológicos que los concatenan según normas (recuperando, aunque a nuestra manera, la doctrina de las *definiciones implícitas*), de tal modo que estos grafos son una *representación* vinculada constitutivamente a este ejercicio. En la medida en que los significados de estos signos no están determinados previamente al ejercicio en el que están involucrados, entendemos a estos signos como *símbolos*. Ahora bien, distinguimos tres tipos de símbolos según las relaciones causales que medien entre significado y significante, a saber: 1) los *símbolos autónomos*, en donde el significado es causa del significante *qua tale*, de tal modo que el significante resulte semejante al significado según un contenido material de semejanza recortado en el proceso mismo de significación (por ejemplo, «palabra», como no podría de ser otra manera, es una palabra); 2) los *símbolos tautogóricos*, según los cuales el significante causa al significado (e.g., el fuego causa al humo y el humo significa «fuego»); y 3) los *símbolos autogóricos*, los cuales son a la vez autónomos y tautogóricos, por lo que en éstos se cierra el circuito causal-semántico; por ejemplo, la «flecha del tiempo» (\rightarrow), por una parte, es un símbolo autónomo, pues supone, para su *representación* (\rightarrow), el movimiento —un ejercicio que implica el propio tiempo— del sujeto operatorio que la traza, pero, por otra, es un símbolo tautogórico, en la medida en que su representación induce el movimiento, en una dirección, de la mirada o el dedo del quien la ve, lo cual es un ejercicio que se despliega en el tiempo. En lo que respecta a los símbolos matemáticos y lógico formales, la posición que mantenemos es que estos símbolos

(2) No entremos aquí en la cuestión del criterio de demarcación entre la Lógica formal y las Matemáticas; tan solo diremos que el Materialismo formalista propone como criterio la distinción entre operaciones autoformantes (aquellas que incluyen la reproducción de al menos uno de los términos operados, como en $x^2=x$) y operaciones heteroformantes (en donde no hay tal reproducción, e.g., $1+2=3$). La Lógica formal trataría, principalmente, con operaciones autoformantes, y las Matemáticas con operaciones heteroformantes, sin que esto quiera decir que no encontremos operaciones autoformantes en las Matemáticas ni operaciones heteroformantes en la Lógica formal.

son autogóricos. Así, por ejemplo, en una categoría cartesiana cerrada C , el ejercicio de la propiedad universal de un producto cartesiano les da significado a los signos (representaciones) $A \leftarrow A \times B \rightarrow A$, y, a su vez, éstos, al ser interpretados como significantes, obligan a reproducir el ejercicio que los define.

Por otra parte, recurriendo al esquema diamérico que comprende a las formas como la conexión entre materialidades distintas, la Teoría del cierre categorial define a la verdad científica como el resultado de la confluencia de al menos dos cursos operatorios que resuelve de manera necesaria en una *identidad sintética sistemática*, de tal modo que, por esta necesidad, quedan neutralizados los sujetos operatorios que ponen en marcha estos cursos, lo cual hace de la verdad científica algo objetivo, independiente de los sujetos operatorios que la constituyen. De este modo, no situamos a la verdad científica en los principios o axiomas (como pretenden Shapiro o Landry), sino en las conclusiones, las cuales, a su vez, son la referencia al momento de reunir las hipótesis, según un movimiento *circular*. La forma y la materia no serían así separables o reducibles la una a la otra, sino que la forma es la propia conformación de las materialidades, por medio, sobre todo, de las identidades sintéticas sistemáticas. Además, gracias a estas identidades sintéticas sistemáticas, los términos de una ciencia se van «anudando», lo cual permite un *cierre categorial*³ que define la «escala» de ésta, de tal modo que, así como la suma de dos naturales es un natural, las operaciones con los términos de una ciencia nos conducen a otros términos de la misma. Por otra parte, notemos que esta doctrina implica que toda ciencia debe tener múltiples términos pertenecientes a clases distintas, pues no cabría hacer identidades sintéticas sistemáticas con un solo término, o una sola clase de términos (por ejemplo, con la sola clase de los «flechas»). De este modo, decimos que una ciencia no tiene un «objeto» de estudio (por ejemplo, que la Teoría de categorías trate de «las estructuras», como pretende Landry), sino un *campo* constituido por una multiplicidad de términos pertenecientes a múltiples clases. Así, en la Teoría de categorías tenemos, no solo objetos A, B, \dots , sino también flechas $A \rightarrow B, A \rightarrow C, \&c.$

Ahora bien, los objetos y flechas, si bien son *términos principales* (esto es, funcionan como «principios» de esta ciencia), no son suficientes por sí solos, pues, para «encauzar» a los cursos operatorios hacia identidades sintéticas sistemáticas, es preciso

(3) No es este el lugar para exponer pormenorizadamente la cuestión de las relaciones entre la idea de «categoría» y la Teoría de categorías, por lo que solo diremos que la Teoría del cierre categorial reinterpreta la idea de categoría de la tradición filosófica, y sostiene, dándole la «vuelta» a la tradición escolástica (que pretendía asignarle a cada categoría aristotélica una ciencia), que hay tantas categorías como ciencias efectivas (e.g., categorías mecánicas, químicas, topológicas, geométricas, &c.). Véase (Bueno, 1992, págs. 53-274).

partir de unos *principia media* objetuales, unas configuraciones internas a la ciencia constituidas según ciertas *identidades sintéticas esquemáticas*⁴. A estas configuraciones las llamamos *contextos determinantes* —determinantes precisamente de identidades sintéticas sistemáticas—. Según lo dicho, la neutralización de los sujetos operatorios que supone una verdad científica no excluye que *el lugar de la verdad científica es el contexto determinante*. Por nuestra parte, afirmamos que los límites (dualmente: los colímites) y las adjunciones pueden funcionar como contextos determinantes de la Teoría de categorías, lo cual explicaría, en parte, la importancia de estos conceptos. Ejemplifiquemos lo dicho hasta aquí analizando gnoseológicamente dos teoremas de la Teoría de categorías.

En Matemáticas, es usual que, al definir un término o una operación, sea necesario demostrar que esta definición, de hecho, define a un sólo término u operación, según los criterios de identidad de la categoría en cuestión. Así, por ejemplo, cuando se define una función f que tiene como dominio a un conjunto de clases de equivalencia, hay que demostrar que su asignación no depende de las «elecciones» de los términos de estas clases. Dicho desde nuestras coordenadas: se hace preciso neutralizar las operaciones, demostrando que, aquello que parece *fenoménicamente distinto* (pongamos por caso, $f(x)$ y $f(y)$) es, *en esencia*, idéntico ($f(x) = f(y)$ cuando $x \sim y$). Y la Teoría de categorías no es la excepción, tal y como nos muestra el siguiente teorema:

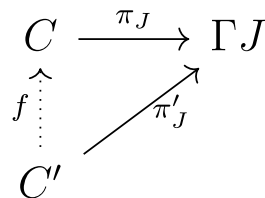
Teorema 1. Sean C e I categorías y $\Gamma: I \rightarrow C$ un funtor. Si $(C \xrightarrow{\pi_I} \Gamma I)_{I \in I}$ y $(C' \xrightarrow{\pi'_I} \Gamma I)_{I \in I}$ son conos límite, entonces $C \cong C'$.

Demos una demostración de este teorema para después analizarlo gnoseológicamente:

Demostración. Sean $(C \xrightarrow{\pi_I} \Gamma I)_{I \in I}$ y $(C' \xrightarrow{\pi'_I} \Gamma I)_{I \in I}$ conos límite. Como $(C \xrightarrow{\pi_I} \Gamma I)_{I \in I}$ es un cono límite y $(C' \xrightarrow{\pi'_I} \Gamma I)_{I \in I}$ es, en particular, un cono, tenemos que $\exists! f: C' \rightarrow C$ tal que, para todo objeto J en I , el siguiente diagrama conmuta:

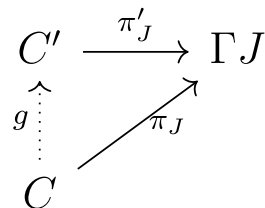
(4) Distinguimos dos tipos generales de identidades sintéticas: las identidades sintéticas sistemáticas y las identidades sintéticas esquemáticas. Según lo ya dicho, las identidades sintéticas sistemáticas, dada su necesidad, son constitutivas de los propios términos que las soportan, de tal modo que están insertas en el *sistema* de los términos que éstas logran trabar. Por otro lado, las identidades esquemáticas no resultan de la confluencia de cursos operatorios, sino que son construidas, ya sea en función de una regla o postulado de construcción (es el caso de la circunferencia, en cuanto sus puntos son equidistantes al centro), ya sea según una resolución sustancial de contenidos heterogéneos (e.g., la protoidentificación entre la «estrella de la mañana» y la «estrella de la tarde» de los astrónomos antiguos). Cabe advertir que, muchas veces, en el contexto del Materialismo filosófico, por «identidad sintética» se sobreentiende «identidad sintética sistemática».

(1)

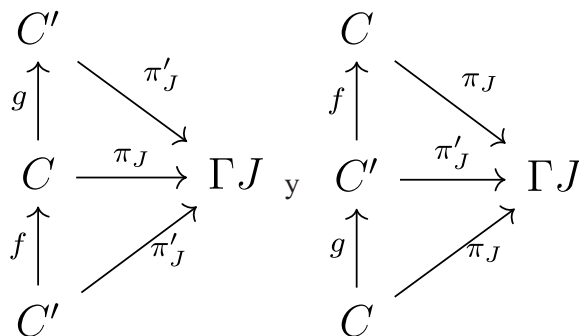


Además, dado que $(C \xrightarrow{\pi_I} \Gamma I)_{I \in I}$ es un cono límite y que $(C' \xrightarrow{\pi'_I} \Gamma I)_{I \in I}$ es, en particular, un cono, tenemos que $\exists! g: C \rightarrow C'$ tal que, para todo objeto J en I , el siguiente diagrama conmuta:

2)



De este modo, juntando los diagramas (1) y (2), tenemos que, para todo objeto J en I , los siguientes diagramas conmutan:



Por otra parte, dado que $id_{C'}: C' \rightarrow C'$ es tal que, para todo objeto J en I , $\pi'_J id_{C'} = \pi'_J$, tenemos, por la unicidad de la propiedad universal del cono límite C' , que $gf = id_{C'}$. De igual manera, puesto que $id_C: C \rightarrow C$ es tal que, para todo objeto J en I , $\pi_J id_C = \pi_J$, entonces, dada la propiedad universal del cono límite C , $fg = id_C$. En conclusión, como $gf = id_{C'}$ y $fg = id_C$, $C \cong C'$.

Pasemos ahora al análisis gnoseológico del teorema. El curso 1 de operaciones comienza con el *postulado* del cono límite C , mientras que el curso 2 con el *postulado* del cono límite C' . Notemos que estos límites son, en principio, *fenoménicamente distintos*. Ahora bien, como en la demostración del teorema solo se usan estos límites, los cursos operatorios se empiezan a «entretrejer» inmediatamente, por lo que no es tan notoria su diferencia. Así, por una parte, utilizamos que C es un cono límite y

que C' un cono para obtener a la flecha f , y, por otra, que C es un cono y C' un cono límite para obtener la flecha g . Luego, volviendo a utilizar que C y C' son conos límite, obtenemos que $fg = Id_C$ y $gf = Id_{C'}$, lo cual define a la *identidad sintética sistemática* $C \cong C'$. De este modo, los conos límite funcionan como *contextos determinantes* cuya *identidad sintética esquemática* está dada por la propiedad universal que los define.

Por otra parte, en las Matemáticas (y en otras ciencias) hay resultados que no nos refieren inmediatamente a una identidad sintética sistemática, sino, más bien, a una construcción. De hecho, estos resultados son lo que en la geometría euclidiana se llamó «problemas». Sin embargo, desde nuestro punto de vista, estos «problemas» son teoremas en la medida en que involucran, en su construcción, identidades sintéticas sistemáticas. De esta manera se podría interpretar el siguiente teorema de la Teoría de categorías:

Teorema 2. Sean I, C y D categorías, $(F, G, \eta, \epsilon): C \rightarrow D$ una adjunción y $\Gamma: I \rightarrow D$ un functor. Si $(D \xrightarrow{\pi_I} \Gamma I)_{I \in I}$ es un cono límite en D , entonces $(GD \xrightarrow{G\pi_I} G\Gamma I)_{I \in I}$ es un cono límite en C .

Como en el teorema anterior, demos primero una demostración de este teorema para después analizarla gnoseológicamente.

Demostración. Sea $(D \xrightarrow{\pi_I} \Gamma I)_{I \in I}$ un cono límite en D . Como $G: D \rightarrow C$ es un functor y D es, en particular, un cono, tenemos que, para toda flecha $i: I \rightarrow J$ en I , el siguiente diagrama conmuta:

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} G\Gamma I & \xrightarrow{G\Gamma i} & G\Gamma J \\ G\pi_I \uparrow & \nearrow G\pi_J & \\ GD & & \end{array}$$

Por lo tanto, $(GD \xrightarrow{G\pi_I} G\Gamma I)_{I \in I}$ es un cono en C . Veamos ahora que es límite.

Sea $(C \xrightarrow{\alpha_I} G\Gamma I)_{I \in I}$ un cono en C . Tenemos que, para toda flecha $i: I \rightarrow J$ en I , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G\Gamma I & \xrightarrow{G\Gamma i} & G\Gamma J \\ \alpha_I \uparrow & \nearrow \alpha_J & \\ C & & \end{array}$$

Por otro lado, como F es adjunto izquierdo de G , sucede que, para todo objeto I en I , existe una única flecha $\beta_I: FC \rightarrow \Gamma I$ que es transpuesta de α_I . Además, para toda flecha $i: I \rightarrow J$ en I , tenemos, por la biyección natural de la adjunción $F \dashv G$, que la transpuesta de

$$C \xrightarrow{\alpha_I} G\Gamma I \xrightarrow{G\Gamma i} G\Gamma J$$

es

$$FC \xrightarrow{\beta_I} \Gamma I \xrightarrow{\Gamma i} \Gamma J.$$

De esta manera, por el diagrama conmutativo (3) y la biyección natural de la adjunción $F \dashv G$, tenemos, para toda flecha $i: I \rightarrow J$ en I , el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma I & \xrightarrow{\Gamma i} & \Gamma J \\ \beta_I \uparrow & \nearrow \beta_J & \\ FC & & \end{array}$$

Por lo tanto, $(FC \xrightarrow{\beta_I} \Gamma I)_{I \in I}$ es un cono en D . Pero, entonces, dado que $(D \xrightarrow{\pi_I} \Gamma I)_{I \in I}$ es un cono límite en D , resulta que existe una única $f: FC \rightarrow D$ tal que, para toda I en I , el siguiente diagrama conmuta:

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\pi_I} & \Gamma I \\ f \uparrow & \nearrow \beta_I & \\ FC & & \end{array}$$

Además, volviendo a utilizar la biyección natural de la adjunción $F \dashv G$, obtenemos que, para toda I en I , la transpuesta de

$$FC \xrightarrow{f} D \xrightarrow{\pi_I} \Gamma I$$

es

$$C \xrightarrow{\lceil f \rceil} GD \xrightarrow{G\pi_I} G\Gamma I.$$

De este modo, dado el diagrama (4), tenemos, para toda I en I , el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} GD & \xrightarrow{G\pi_I} & G\Gamma I \\ \lceil f \rceil \uparrow & \nearrow \alpha_I & \\ C & & \end{array}$$

Por último, notemos que la unicidad de $\lceil f \rceil$ se obtiene utilizando la adjunción $F \dashv G$ y unicidad de f . En conclusión, $(GD \xrightarrow{G\pi_I} GTI)_{I \in \mathbf{I}}$ es un cono límite en C .

Si bien no consideramos que en esta demostración haya propiamente dos cursos operatorios, sí sostenemos que, *dado el primer teorema*, el curso operatorio que construye al límite «desemboca» en una *identidad sintética sistemática*, por lo que, al final, queda neutralizado. Por otra parte, notemos que en este curso se utilizan las siguientes dos *identidades sintéticas esquemáticas*: 1) La propiedad universal que define al cono límite D postulado, por la cual obtuvimos la flecha f y la unicidad (identidad) de la flecha $\lceil f \rceil$; y 2) La biyección natural (identidad) de la adjunción $F \dashv G$ también postulada, gracias a la cual obtuvimos las flechas β_I y las *identificaciones* de las transpuestas de las flechas $\pi_I f$ y β_I y de las flechas $G\Gamma_i\alpha_I$ y $\Gamma_i\beta_I$. Así, en este teorema, el cono límite D y la adjunción $F \dashv G$ funcionan como *contextos determinantes*. Consideramos que con estos dos teoremas quedan bien ejemplificadas las tesis hasta ahora expuestas.

Agregado a lo anterior, los contextos determinantes (y, con ello, las identidades sintéticas sistemáticas) se van «entretejiendo» entre sí, tal como, de hecho, lo mostramos por medio de los dos teoremas anteriores. Pero esto no significa que la *unidad categorial* de una ciencia tenga que ser homogénea, uniforme; diríamos, más bien, que los campos categoriales tienen una estructura «arracimada», formada por múltiples e independientes «racimos» de contextos determinantes «entretejidos», sin perjuicio de sus eventuales «contactos». De este modo, la *unidad genérica* de una ciencia se nos manifiesta en el plano abstracto de unos términos, relaciones y operaciones comunes a todos los círculos de cierre. En el caso de la Teoría de categorías, están las categorías abelianas, distributivas, extensivas, o la Teoría de topos, con su propio «Teorema fundamental»: Si \mathcal{E} es un topos y A es un objeto en este topos, entonces \mathcal{E}/A también es un topos.

Por otra parte, desde la Teoría del cierre categorial sostenemos que hay múltiples *modos gnoseológicos* según los cuales se construyen teoremas, y, como criterio de clasificación para establecerlos, utilizamos cuatro tipo de «functores» (no los de la Teoría de categorías); a saber: los funtores predicativos (que forman relaciones a partir de términos), los funtores nominativos (que forman términos a partir de términos), los funtores conectivos (que forman relaciones a partir de relaciones)

y los funtores determinativos (que forman términos a partir de relaciones). De este modo, en una ciencia puede haber *modelos* (correspondientes a los funtores predicativos), *clasificaciones* (funtores determinativos), *definiciones* (funtores nominativos) y *demostraciones* (funtores conectivos). Demos unos ejemplos en la Teoría de categorías:

- Modelo: El establecimiento —por primera vez, por parte de Kan—, a partir de unos fenómenos de referencia, de la relación de adjunción entre dos funtores F y G .
- Clasificación: La clasificación de categorías distributivas, extensivas, booleanas, &c., que Aurelio Carboni, Stephen Lack y R. F. C. Walters edifican en su artículo *Introduction to extensive and distributive categories* [5].
- Definición: La definición de *cono límite*.
- Demostración: El teorema «Sea \mathcal{E} un topos y 0 su objeto inicial. Para todo objeto A en \mathcal{E} , si $A \rightarrow 0$ es una flecha en \mathcal{E} , entonces $A \cong 0$ ».

Desde este punto de vista, la propuesta de Landry de que la Teoría de categorías trata sobre «clasificar estructuras» es improcedente, no solo porque, como ya dijimos, esta ciencia no consta de un solo «objeto», sino también porque no todos sus teoremas son clasificaciones.

Pasemos ahora a una cuestión central: las relaciones entre las definiciones y los ejemplos. ¿Es que el matemático dedicado a la Teoría de categorías puede desentenderse por completo de los ejemplos que le brindan las otras ciencias matemáticas? ¿Acaso éstos tienen un papel en la génesis, pero estructuralmente, una vez constituidas las definiciones, ya no son necesarios? ¿Son un mero recurso didáctico? Desde la Teoría del cierre categorial sostenemos que *la Teoría de categorías tiene, como contenidos propios fenoménicos, a los ejemplos que proceden de otras ciencias*. Y esto no solo genéticamente, sino porque, como vimos, las demostraciones de los teoremas de esta ciencia necesitan de unos postulados (e.g., los contextos determinantes), los cuales, en cuanto postulados, requieren de al menos un ejemplo que los *fundamente materialmente*, esto es, que muestre que los significados autogóricos que definen a los postulados en cuestión se encuentran como *resultados* en ciencias matemáticas previas (sin perjuicio de que, a veces, los ejemplos provengan de la propia Teoría de categorías, como cuando se ejemplifican los conos límite con el igualador). Así, para fundamentar materialmente

un producto fibrado, un matemático no tiene que regresar hacia una supuesta Teoría de estructuras (como pretende Shapiro), sino que simplemente lo ejemplifica, ya sea en la Teoría de conjuntos, en la Topología, o en cualquier otra ciencia matemática. Es más, es en la función del *contraejemplo* en donde nuestra tesis toma mayor fuerza, pues ¿cómo argumentan los matemáticos que, por ejemplo, no es cierto que en toda categoría con objeto terminal $\mathbf{1}$ sucede que para todo objeto A , $A \rightarrow \mathbf{1}$ es epi si y solo si existe una flecha $\mathbf{1} \rightarrow A$? Descendiendo a la materia, mostrando un contraejemplo (pongamos por caso, en la categoría de gráficas).

Se podría argumentar contra esta tesis que la Teoría de categorías no tendría autonomía, pues sus fundamentos materiales se encontrarían «fuera», en otras ciencias. Sin embargo, las verdades de la Teoría de categorías (las cuales definen su *unidad*), no están en estos fundamentos materiales, sino, como ya argumentamos, en las identidades sintéticas sistemáticas entre sus términos. Otra objeción podría ser que algunos fundamentos materiales de las demás ciencias matemáticas también dependerían de ejemplos procedentes de otras ciencias, por lo que estaríamos ante un proceso *ad infinitum*. Responder a esto pormenorizadamente desbordaría los límites de este artículo, así que aquí sólo indicamos que, sin perjuicio de que, de hecho, otras ciencias matemáticas también encuentren ejemplos «fuera» de ellas (como cuando se ejemplifica el concepto de espacio vectorial recurriendo a estructuras del Cálculo), lo cierto es que hay ciencias matemáticas que pueden fundamentarse materialmente desde su propio «interior» (así, el concepto de grupo tiene como principal fundamento material a los grupos de permutaciones, los cuales se definen por encadenamientos autogóricos de grafos). Pero también se nos podría decir que las reorganizaciones axiomáticas de la Teoría de categorías (tales como la inspirada en la categoría de todas las categorías) la harían plenamente independiente. No obstante, hasta el día de hoy no ha habido una reorganización axiomática plenamente efectiva y, más aún, ¿es que acaso los «racimos» de la Teoría de categorías no están determinados, al menos en parte, en función de los ejemplos que van incorporando en su desarrollo? ¿Cabe, por ejemplo, una Teoría de topos al margen de toda referencia a las demás ciencias matemáticas? Nosotros suponemos que no.

Por otra parte, podría parecer que, con esto, estamos «rompiendo en dos» el significado de los símbolos de la Teoría de categorías, pues, por una lado, serían signos autogóricos según un cierre causal semántico, pero, por

otro, encontrarían su fundamento en sus ejemplos, lo cual nos llevaría a otros signos autogóricos, en una suerte de significación *alegórica*. Sin embargo, para no romper la unidad del significado de estos símbolos, sostenemos que, cuando los matemáticos los ejemplifican, en realidad los están «insertando», en función de una demostración, en un «contexto fenoménico», de manera similar a cuando a la luna la vemos desde un punto de vista, «inserta» entre otros objetos circundantes. Según esto, ejemplificar, pongamos por caso, el concepto de coproducto es «insertar» a este coproducto, por ejemplo, en el contexto de la categoría de conjuntos, por lo cual, dado su «entretrejimiento» con los significados autogóricos de esta categoría, éste se nos muestra como una unión disjunta de conjuntos. Más precisamente: ejemplificar un término de la Teoría de categorías (definido según un ejercicio e_k) es redefinir, por medio de una *transyección*⁵, unos símbolos autogóricos (procedentes de otras ciencias matemáticas o de la propia Teoría de categorías, según sea el caso) en función del ejercicio e_k , de tal modo que, si la redefinición es efectiva (según una demostración), estos símbolos sean un ejemplo (y, por lo tanto, un fundamento material) del concepto de partida. Recíprocamente, un matemático, tomando como referencia unos símbolos autogóricos de una ciencia matemática, puede construir (definir), en un *regressus*, unos símbolos autogóricos en la Teoría de categorías, conforme a la escala propia de ésta, y luego, en un *progressus*, demostrar, en función de una *transyección*, que los símbolos de partida, en el contexto de referencia, quedan determinados, al menos salvo isomorfismo, por medio de la definición, por lo cual éstos funcionarían como ejemplos (y, por lo tanto, como fundamento material). Por lo demás, notemos que, con esto, hemos reinterpretado la distinción de Shapiro entre estructuras (definiciones) y sistemas estructurados (ejemplos).

Ahora bien, *las definiciones de la Teoría de categorías no tienen por qué «agotar» a sus ejemplos*, pues éstas dejan fuera, en su propia constitución, a una muchedumbre de relaciones (y, con ello, de significados autogóricos) de las ciencias de las cuales se toman los ejemplos. Esto explicaría las *discontinuidades* que pueda llegar a haber entre un ejemplo y otro de una misma definición (por ejemplo, como en la categoría de conjuntos el objeto terminal es $\{\emptyset\}$ mientras que en la categoría de gráficas es $\cdot \curvearrowright$, que un objeto A sea tal que $\mathbf{1} \rightarrow A$ significa, en la categoría de conjuntos, que $A \neq \emptyset$, pero, en la categoría de gráficas,

(5) «Transyección, como procedimiento de análisis y construcción, es la transposición (traspaso o transferencia) de una estructura formalizada A a una materia (relativamente) amorfa (o en todo caso organizada de modo distinto de A) que se organiza siguiendo algunas líneas de la primera (modificándolas, rectificándolas en diverso grado)» (Bueno, 1992, pág. 1442).

que A es una gráfica con al menos un bucle). Aún más, un mismo término podría significar cosas distintas (o, mejor aún, su significado podría verse «deformado») en función de los propios «contextos» de la Teoría de categorías (por ejemplo, mientras en un topos, $1 \neq 0$, en una categoría abeliana, por definición, $1 = 0$). De hecho, consideramos que son estas discontinuidades aquello que advierte Johnstone en su ya mencionado uso de la metáfora del elefante. Desde esta perspectiva, el Materialismo formalista está en las antípodas del formalismo de Hilbert, que, al vaciar a los símbolos de significado, *ecualiza a todos los ejemplos de una misma definición, como si éstos quedasen agotados por ésta* (recuérdese la famosa cita «hay que poder decir en todo momento: en lugar de puntos, rectas y planos, mesas, sillas y tarros de cerveza»). Por lo demás, habría casos en los que el nombre del término definido fuese «ajustado» a lo que de hecho define, mientras que otras veces no sería más que una metáfora que en realidad toma como referencia a un ejemplo concreto, pero dejamos este asunto para otra ocasión⁶.

Para finalizar, utilizaremos el *espacio gnoseológico* de la Teoría del cierre categorial para ordenar a los componentes de esta ciencia, el cual consta de tres ejes: eje sintáctico, eje semántico y eje pragmático, con tres figuras cada uno⁷.

→ Eje sintáctico (σ_i, σ_j)

- Términos $(\sigma_i, O_k) / (O_k, \sigma_j)$:
Conos límite, objetos de números naturales, mónadas.
- Operaciones $(\sigma_i, S_k) / (S_k, \sigma_j)$:
Funtores, transformaciones naturales.
- Relaciones $(\sigma_i, \sigma_k) / (\sigma_k, \sigma_j)$:
Propiedades universales, adjunciones, equivalencia entre categorías, isomorfismos.

→ Eje semántico (O_i, O_j)

- Referenciales $(O_i, \sigma_k) / (\sigma_k, O_j)$:
Flechas, objetos, categorías.
- Fenómenos $(O_i, S_k) / (S_k, O_j)$:
Ejemplos, contraejemplos, diagramas conmutativos.
- Estructuras o esencias $(O_i, O_k) / (O_k, O_j)$:
Definiciones, modelos, clasificaciones, demostraciones.

(6) No deja de tener interés la situación en donde una definición queda «subsumida» en un contexto fenoménico concreto; tal es el caso, por ejemplo, del Teorema de Cayley o del teorema de las categorías abelianas que dice: «Si C es una categoría abeliana pequeña, entonces existe un anillo R y un functor exacto, fiel y pleno $f: C \rightarrow \text{mod}_R$ ».

(7) En la siguiente exposición, designamos a los signos lingüísticos por σ , a los significados por O , a los sujetos por S y al producto relativo por $/$.

→ Eje pragmático (S_i, S_j)

- Normas $(S_i, \sigma_k) / (\sigma_k, S_j)$:
Criterios de identidad, criterios de equivalencia.
- Dialogismos $(S_i, O_k) / (O_k, S_j)$:
Seminarios, conferencias, cartas.
- Autologismos $(S_i, S_k) / (S_k, S_j)$:
Cuando el matemático transpone una composición de flechas en función de «leyes» de transposición previamente aprendidas.

En conclusión, diremos, representando la Ontología del Materialismo filosófico (hasta ahora solo ejercitada), que los grafos de la Teoría de categorías (grafos pertenecientes a M_1 , el primer género de materialidad), por medio de los ejercicios efectuados por sujetos operatorios (ejercicios pertenecientes a M_2 , el segundo género de materialidad), adquieren un significado relacional (perteneciente a M_3 , el tercer género de materialidad). Además, algunas relaciones, en cuanto postuladas, adquieren su fundamento por medio de los ejemplos (sin que esto quiera decir que éstos queden agotados por tales relaciones), mientras que otras, en cuanto identidades sintéticas sistemáticas de unos términos definidos por relaciones terciogénicas efectivas, fundan lo que llamamos *estructuras esenciales*. Es así que negamos que la Teoría de categorías sea un mero lenguaje, en cuanto es una ciencia que consta de términos, operaciones, relaciones, ejemplos, teoremas, &c. Sumado a esto, en la medida en que cada ciencia matemática tiene su propia escala no cabe decir que la Teoría de categorías es la ciencia de las estructuras matemáticas (como pretende Landry, o, como veremos, Marquis).

(b) El circularismo indeterminado de Jean Pierre Marquis.

Marquis escribió varios artículos e incluso un libro sobre filosofía de la Teoría de categorías, sin embargo, aquí nos centraremos solamente en dos: *What is category theory?* [14] y *Canonical maps* [13], comenzando por el primero.

En este artículo, Marquis nos propone que, para responder a la pregunta de qué es la Teoría de categorías, es necesario primero recorrer sus «contextos, funciones y formas» a lo largo de la historia, pues esta teoría sería la forma resultante de ese proceso histórico, en donde unas veces los contextos y funciones dieron lugar a nuevas formas, mientras que otras sucedió al revés. Y, si bien no nos ofrece su criterio para esta distinción, ni tampoco define en principio ninguno de estos términos, sus análisis históricos nos dan una idea de sus intenciones. De hecho, es precisamente aquí en donde Marquis se nos muestra —más en ejercicio que en representación, pues ni siquiera habla explícitamente de la verdad científica— como un circularismo indeterminado, y

nos parece que la mejor manera de argumentar esto es exponiendo e interpretando algunos de sus análisis; más concretamente, nos es suficiente atender a su exposición de las siguientes «etapas»: la primera, que corresponde a la «prehistoria» de la Teoría de categorías; otra, en donde, a juicio de él, esta teoría comenzó a ser una ciencia autónoma; y por último, aquella en donde la teoría ya tuvo plena autonomía.

La primera «etapa» tiene como referencia el conocido artículo *General Theory of Natural Equivalences* [6], escrito por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en 1945. El contexto es el «problema» suscitado por que estos matemáticos sorprendentemente habían llegado a un mismo grupo por vías distintas —uno porque necesitaba calcular la homología del solenoide y el otro motivado por problemas de extensiones de grupos—, lo cual motivó el artículo; la forma fueron las definiciones de transformación natural, functor y categoría; y, por último, la función fue utilizar estas definiciones en la «explicación» de la «coincidencia». A pesar de que en este artículo se definen términos, operaciones y relaciones de lo que después será la Teoría de categorías, Marquis, no sin razón, considera que todavía no podemos encontrar en éste a una ciencia autónoma, pues éstos estarían enteramente subordinados a la resolución del «problema» en cuestión. Desde la Teoría del cierre categorial, diríamos que aquí solo hallamos el *contexto tecnológico* en el cual se definieron los primeros términos de la Teoría de categorías, aunque esto requeriría un análisis más circunstanciado.

Por otra parte, la segunda «etapa» que consideramos tiene como centro el artículo *Adjoint functors* [8], el cual servía como complemento al artículo *Functors involving c.s.s. complexes* [9], ambos escritos por Daniel Kan en 1958. En este caso, el contexto y la función están dados por el segundo artículo (en el cual se tratan varios tipos de complejos desde el concepto de adjunción), pero es en el primero en donde se nos presenta la forma, pues, en éste, Kan define, entre otras cosas, los conceptos de adjunción, límite y colímite, y, además, prueba un teorema que establece una equivalencia entre la existencia de límites y colímites en una categoría, y la existencia de determinados adjuntos. Lo que nos importa recalcar es, sobre todo, que Marquis hace mucho énfasis en la importancia de estas definiciones y este teorema para la consolidación de la Teoría de categorías como una ciencia autónoma. Además, después de hacer este énfasis, nos dice, según nuestra traducción, que el artículo [*Functors involving c.s.s. Complexes*] nos presenta la noción de functores adjuntos... y sistemáticamente examina *cómo la noción de la adjunción está relacionada con otras importantes nociones de la Teoría de categorías*, como los límites y colímites (Marquis, 2006, pág. 240). Y un par de páginas adelante continúa: Una vez que la noción de functores adjuntos es vista como central, los functores, categorías y sus propiedades adquieren autonomía (Marquis, 2006,

pág. 242). Sin embargo, Marquis no nos da ninguna explicación de por qué esto es así, y, a nuestro modo de ver, no lo podría haber hecho porque no dispone de una doctrina como la de los contextos determinantes. En efecto: desde nuestro punto de vista, la importancia de estas definiciones y el teorema reside en que, por una parte, los límites, colímites y adjunciones son contextos determinantes, y, por otra, este teorema «entreteje», por medio de identidades sintéticas sistemáticas, a diferentes conceptos de la Teoría de categorías, delimitando así, al menos por un «flanco», su escala. De este modo, en la medida en que Marquis reconoce la importancia central de este teorema en la constitución de la Teoría de categorías como ciencia autónoma, consideramos a su filosofía como un circularismo (y esto sin perjuicio de su uso de la palabra «forma», la cual sirve como «cajón de sastre»), pero, por no disponer de una doctrina como la de los contextos determinantes, es un circularismo indeterminado, carente de fundamento.

Finalmente, la última «etapa» se asienta sobre el extenso trabajo del matemático William Lawvere en la década de los 60, sobre todo en su artículo *Adjointness in foundations* [12]. Para Marquis, es aquí en donde la Teoría de categorías logra ya una plena autonomía, y esto gracias, principalmente, a que Lawvere logró «reformular» muchísimos conceptos matemáticos y «lógicos» en términos de adjunciones (categoría cartesiana cerrada, cuantificador universal, conjunción, recursión, &c.). No haremos un análisis pormenorizado del asunto, pues esto desbordaría por completo los límites de este artículo. Lo que nos interesa recalcar aquí es que Marquis, inspirado sobre todo por esta última «etapa», concluye que la historia de la Teoría de categorías nos muestra un paulatino proceso de «abstracción» que llevó a los matemáticos a la formulación de una ciencia autónoma, la cual, supuestamente, dada, por una parte, la aparente «ubicuidad» de sus términos, operaciones y relaciones (sobre todo de la relación de adjunción), como, por otra, la fertilidad de sus teoremas para «reorganizar» una serie de fenómenos y esencias (por ejemplo, diríamos nosotros, el Teorema del punto fijo de Lawvere), se nos mostraría, en sus palabras, como «la arquitectura de las Matemáticas». De hecho, da un paso más, y nos dice, *ex abrupto*, haciendo una referencia tímida a Kant, que, tal vez, la Teoría de categorías es la arquitectura de los conceptos o de los sistemas conceptuales en general...la arquitectura de la Razón (Marquis, 2006, pág. 252). Esta sorprendente conclusión encuentra su desarrollo en el otro artículo.

En éste, deja a un lado a las adjunciones y coloca sobre el centro de la cuestión a los llamados «morfismos canónicos», los cuales son, según él, salvo dualidad, de los siguientes tres tipos: 1) las flechas que definen a un cono límite, 2) la flecha universal de un cono a un cono límite, y 3) el isomorfismo entre dos conos límites de un mismo diagrama. Marquis constata que los ejemplos

de (co)límites, como es bien sabido, abundan en las Matemáticas (por ejemplo, preimagen, producto, suma directa, supremo, y un largo etcétera); que, además, están involucrados en varias identidades (acercándose así, de hecho, a la idea de contexto determinante, pero sin mayor repercusión); y que, por último, se pueden caracterizar ciertas categorías y relaciones entre éstas en términos de estos (co)límites (regresando al teorema de Kan). Todo lo anterior lo lleva a la misma conclusión sobre la Teoría de categorías como «arquitectura de las Matemáticas», pues esta teoría, al establecer relaciones entre (y desde) los (co)límites, estaría dándole a las Matemáticas una unidad sistemática, en la cual, precisamente, éstos funcionarían como «principios». Una unidad que, además, en palabras de Marquis, «nos proveería de un plan para el conocimiento matemático y la comprensión de su organización fundamental». En esta línea, nos dice, a vueltas con Kant, que la Teoría de categorías nos pone ante las *formas a priori* de las Matemáticas.

Precisamente contra esta conclusión fue que erigimos la conferencia *La Teoría de categorías como forma a priori de las Matemáticas* [15], pronunciada en el marco de los *Encuentros de Materialismo filosófico en México*, pero, en ésta, no analizamos gnoseológicamente la filosofía de Marquis, y, por lo tanto, no diagnosticamos «a fondo» el porqué de su error. La tesis que aquí defendemos es que, simplemente, éste emana, por una parte, de hipostasiar los significados de los símbolos de la Teoría de categorías y, por otra, de su circularismo indeterminado; en efecto: al prescindir de la doctrina de los contextos determinantes (y con ello, de la idea de identidad sintética sistemática) Marquis termina «proyectando» a las verdades científicas en el sujeto operatorio, en cuanto depósito de unas formas *a priori* trascendentales a toda experiencia. No negamos que los conos límite, junto con las adjunciones, recojan en su seno una multitud sorprendente de fenómenos, pero esto no se debe a una transcendentalidad *a priori*, sino que, en todo caso, está dado en función de una transcendentalidad *a posteriori*, fundada en la continua demostración, por parte de los matemáticos, de que ciertos fenómenos — no todos — pueden ser reorganizados *a una escala* por la Teoría de categorías.

Conclusión

Hemos propuesto aquí una filosofía de la Teoría de categorías desde el Materialismo formalista y en contra de la filosofía de Shapiro, Landry y Marquis. Los grafos de esta ciencia matemática no están vacíos de significado, pero éstos tampoco nos remiten a unas estructuras sin materia, ni a unas formas *a priori*, sino que son signos autogóricos. Además, sus verdades científicas no se encuentran en una adecuación entre un «lenguaje» y unas estructuras, ni tampoco son un mero postulado, sino

que se constituyen por medio de identidades sintéticas sistemáticas en el seno de contextos determinantes, según una escala inconmensurable a la de otras ciencias. Por otra parte, defendemos que algunos de sus conceptos necesitan de ejemplos procedentes de otras ciencias matemáticas, sin que esto implique que éstos queden agotados por aquellos. Por último, en la medida en que la Teoría de categorías consta de ejemplos, estructuras esenciales, normas, relaciones, &c., sostenemos que esta ciencia no es un lenguaje. Por lo demás, no pretendemos haber agotado aquí las cuestiones que puede suscitar la Teoría de categorías y, de hecho, todavía queda mucho por hacer. La materia es inagotable.

Bibliografía

- [1] Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre categorial*. (Vols. 1–5). Pentalfa.
- [2] Bueno, G. (1979). Operaciones autoformantes y heteroformantes (I). *El Basilisco*, 7, 16–39.
- [3] Bueno, G. (1979). Operaciones autoformantes y heteroformantes (II). *El Basilisco*, 8, 4–25.
- [4] Bueno, G. (1972). *Ensayos materialistas*. Taurus.
- [5] Carboni, A., Lack, S., y Walters, R. (1993). Introduction to extensive and distributive categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 84(2), 145–158.
- [6] Eilenberg, S., MacLane, S. (1945). General Theory of Natural Equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58(2), 231–292.
- [7] Johnstone, P. T. (2006). *Sketches of an elephant: A topos theory compendium*. Clarendon Press.
- [8] Kan, D. M. (1958). Adjoint functors. *Transactions of the American Mathematical Society*, 87(2), 294–329.
- [9] Kan, D. M. (1958b). Functors involving C.S.S. complexes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 87(2), 330–346.
- [10] Landry, E. (2022). Mathematics: Method without metaphysics. *Philosophia Mathematica*, 31(1), 56–80.
- [11] Topos Institute. (30 de mayo del 2023) *As if category theory were a foundation*. Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=XRKHSIFvq4Q>
- [12] Lawvere, F. W. (1969). Adjointness in Foundations. *Dialectica*, 23(3–4), 281–296.
- [13] Marquis, J. P. (2017). Canonical maps. In E. Landry (Ed.), *Categories for the working philosopher* (pp. 90–112). Oxford University Press.
- [14] Marquis, J. P. (2006). What is category theory?. In G. Sica (Ed.), *What is category theory?* (pp. 221–255). Polimetrica.
- [15] nodulov. (14 de noviembre del 2024) *La Teoría de categorías como forma a priori de las matemáticas*. Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=hcUzmfzZBKQ>
- [16] Shapiro, S. (1997). *Philosophy of mathematics: Structure and ontology*. Oxford University Press.

Recepción: junio 2025

Aceptación: noviembre 2025